Modulare Funktionen und Approximationen von PI

Eine modulare Funktion ist eine Funktion λ(q), die durch einen als modulare Gleichung bezeichneten algebraischen Ausdruck zur selben Funktion mit derselben Variablen q in einer ganzzahligen Potenz : λ(q^{ρ}) in Beziehung gesetzt werden kann. Die ganzzahlige Potenz ρ bestimmt die „Ordnung" der modularen Gleichung. Ein Beispiel einer modularen Funktion ist

$$\lambda(q)=16\,q\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^{8}$$

Die zugeordnete modulare Gleichung der siebten Ordnung, die λ(q) in Beziehung zu λ(q^7) setzt ist gegeben durch

$$\sqrt[8]{\lambda(q)\lambda(q^7)}+\sqrt[8]{[1-\lambda(q)][1-\lambda(q^7)]}=1$$

Singuläre Werte sind Lösungen von modularen Gleichungen, die zusätzliche Bedingungen erfüllen müssen. Eine Klasse von singulären Werten ergibt sich durch Berechnung einer Folge von Werten k_p , wo

$$k_p \;=\; \sqrt{\lambda(e^{-\pi\sqrt{\rho}})}$$

und ρ ganzzahlige Werte annimmt. Diese Werte haben die erstaunliche Eigenschaft, daß der logarithmische Ausdruck

$$\frac{-2}{\sqrt{\rho}}\quad\log(k_p/4)$$

mit vielen der ersten Ziffern von Pi koinzidiert. Die Anzahl Ziffern, die der Ausdruck mit Pi gemeinsam hat, nimmt mit größeren Werten ρ zu.

Ramanujan suchte seinesgleichen, was seine Fähigkeit betrifft, diese singulären Werte zu berechnen. Einer seiner berühmtesten ist der Wert wo ρ gleich 210 ist, den er seinem ursprünglichen Brief an G. H. Hardy beifügte. Er lautet

$$k_{210}=(\sqrt{2}-1)^2(2-\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2(8-3\sqrt{7})(\sqrt{10}-3)^2(\sqrt{15}-\sqrt{14})(4-\sqrt{15})^2(6-\sqrt{35})$$

Diese Zahl, in den logarithmischen Ausdruck eingesetzt, stimmt mit Pi in den ersten 20 Dezimalstellen überein. Im Vergleich dazu ergibt $k_{(2^{40})}$ einen Wert, der mit über einer Million Ziffern von Pi übereinstimmt.