Ramanujan und π

von Jonathan M. Borwein und Peter B. Borwein

Vor etwa 75 Jahren entwickelte ein indisches mathematisches Genie Methoden, Pi mit außerordentlicher Effizienz zu berechnen. Sein Ansatz ist nun in Computer-Algorithmen eingearbeitet, die Millionen von Dezimalstellen der Zahl Pi ergeben.

Pi, das Verhältnis jedes Kreises Umfang zu seinem Durchmesser, wurde 1987 zu einer bisher nicht erreichten Genauigkeit berechnet: mehr als 100 Millionen Nachkommastellen. Das vergangene Jahr markierte auch den hundertsten Geburtstag von Srinivasa Ramanujan, ein geheimnisvolles indisches Genie der Mathematik, der den größten Teil seines kurzen Lebens gesundheitlich angeschlagen und in Isolation verbrachte. Die beiden Ereignisse sind in der Tat eng verknüpft, weil der grundlegende Ansatz, der den jüngsten Berechnungen der Zahl Pi zugrundeliegt, von Ramanujan vorweggenommen worden war, obwohl seine Implementierung auf die Formulierung effizienter Algorithmen (durch verschiedene Arbeiten von unserer und anderer Seite), moderner Supercomputer und neue Methoden bei der Multiplikation von Zahlen warten mußte.

Abgesehen von der Bereitstellung einer Arena, in der bestimmte Rekorde aufgestellt werden können, erscheint die Jagd nach der Berechnung der Zahl der Nachkommastellen auf Millionen von Dezimalstellen ziemlich sinnlos. Neununddreißig Stellen von Pi reichen völlig aus, um den Umfang eines Kreises, der das bekannte Universum umfaßt, mit einem Fahler zu berechnen, der nicht größer als der Radius des Wasserstoffatoms ist. Es ist schier unmöglich, sich physikalische Situationen vorzustellen, die mehr Dezimalstellen erfordern. Warum geben sich Mathematiker und Computer-Wissenschaftler nicht mit den, sagen wir, ersten 50 Ziffern von Pi zufrieden?

Mehrere Antworten sind möglich. Eine ist, daß die Berechnung von Pi zu etwas wie einer Meßlatte geworden ist: sie dient als Maß der Rafinesse(sophistication) und Verläßlichkeit der Computer, die sie ausführen. Außerdem führt die Jagd nach immer genaueren Werten von Pi Mathematiker in faszinierende und unerwartete Nischen der Theorie der Zahlen. Ein weiterer und viel geistreicherer Beweggrund ist einfach: "weil es die Sache nun einmal gibt". In der Tat, Pi ist ein Fixpunkt der mathematischen Kultur seit über zweieinhalb tausend Jahren.

Weiterhin besteht die Chance, daß solche Berechnungen in der Zukunft Licht auf einige der Rätsel werfen, von denen die Zahl Pi umgeben ist, einer universellen Konstante, die trotz ihrer relativ elementaren Natur nicht besonders gut verstanden ist. Zum Beispiel, obwohl bewiesen ist, daß Pi niemals genau evaluiert werden kann, indem man positive ganze Zahlen einer beliebigen Kombination von Addition, Subtraktion, Division oder Wurzelziehen unterwirft, ist es bisher niemandem gelungen zu zeigen, daß die Nachkommastellen von Pi zufällig verteilt sind(in dem Sinn, daß jede Zahl von 0 bis 9 mit gleicher Häufigkeit vorkommt.) Es ist möglich, ober höchst unwahrscheinlich, daß nach einer Weile alle übrigen Ziffern von Pi Nullen oder Einsen sind oder irgendeine andere Regelmäßigkeit aufweisen. Überdies taucht Pi an allen möglichen unerwarteten Stellen auf, die mit Kreisen nichts zu tun haben. Wählt man eine Zahl zufällig aus der Menge der natürlichen Zahlen aus, zum Beispiel, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie keine wiederholten Primzahl-Divisoren hat, sechs geteilt durch das Quadrat von Pi. Wie alle anderen berühmten Mathematiker fiel Ramanujan der Faszination der Zahlen zum Opfer.

Die Bestandteile der neuesten Ansätze Pi zu berechnen, finden sich unter den mathematischen Schätzen, die durch das erneute Interesse an Ramanujans Arbeit zutage gefördert wurden. Viele seiner Ergebnisse sind jedoch für

Forscher noch unzugänglich. Der Hauptteil seiner Arbeit ist in seinen "Notizbüchern" enthalten, welches persönliche Aufzeichnungen mit eigenen Bezeichnungen sind.
Was die Sache für Mathematiker noch frustrierender macht, die sich mit den Notizbüchern befaßt haben, ist die Tatsache, daß Ramanujan im allgemeinen seinen Theoremen keine formalen Beweise hinzufügte. Die Anstrengungen, die Notizbücher zu entschlüsseln und schriftlich aufzubereiten, die von Bruce C. Berndt von der Universität von Illinois in Urbana-Champaign unternommen wurden, gehen erst jetzt ihrer Vollendung entgegen.

Unseres Wissens, ist bisher keine Ausgabe eines mathematischen Werks mit diesem Umfang oder Schwierigkeitsgrad versucht worden. Die Anstrengung lohnt sich gewiß. Ramanujans Hinterlassenschaft in den "Notizbüchern" verspricht nicht nur, die reine Mathematik zu bereichern, sondern auch Anwendung in mancherlei Gebieten der mathematischen Physik zu finden. Rodney J. Baxter von der australischen National-Universität, zum Beispiel, erkennt an, daß Ramanujans Entdeckungen ihm dabei halfen, Probleme der statistischen Mechanik wie das sogenannte harte Hexagon Modell zu lösen, welches das Verhalten eines Systems von wechselwirkenden Teilchen im Rahmen eines honigwabenförmigen Gitters beschreibt. Ähnlich haben Carlos J. Moreno von der Universität der Stadt New York und Freeman J. Dyson vom Institut für fortgeschrittene Studien hervorgehoben, daß Ramanujans Werk im Begriff ist, von Physikern in der Superstring-Theorie angewandt zu werden.

Ramanujans Können als Mathematiker ist umso mehr erstaunlich, wenn man seine limitierte formale Ausbildung berücksichtigt. Er wurde am 22 Dezember 1887 in eine einigermaßen verarmte Familie der Kaste der Brahmanen in der Stadt Erode in Südindien geboren und wuchs in Kumbakonam , wo sein Vater Buchführer bei einem Tuchhändler war.
Sein mathematisches Talent wurde frühzeitig entdeckt und im Alter von sieben Jahren erhielt er ein Stipendium für die Oberschule der Stadt Kumbakonam.
Es heißt, daß er seinen Schulkameraden mathematische Formeln zitierte - einschließlich des Wertes von Pi mit vielen Kommastellen.

Im Alter von 12 Jahren meisterte Ramanujan den Inhalt von S. L. Loney's ziemlich umfänglicher "Elementarer Trigonometrie", einschließlich der darin enthaltenen Diskussion von Summe und Produkt unendlicher Folgen, die in seinem zukünftigen Werk eine herausragende Rolle spielen sollten.(Eine unendliche Folge ist eine Aneinanderreihung von unendlich vielen Gliedern, ähnlich den natürlichen Zahlen 1,2,3,4,...,, die oft Resultat einer einfachen Formel ist. In diesem Kontext sind die interessanten Folgen jene, deren Glieder addiert oder multipliziert werden können, wobei sich im Grenzübergang ein angebbarer endlicher Wert ergibt. Werden die Glieder addiert, nennt man den resultierenden Ausdruck eine Reihe; wenn sie multipliziert werden, spricht man von einem Produkt.) Drei Jahre später lieh er sich die "Synopsis der elementaren Ergebnisse in Reiner Mathematik", einer Aufzählung von zirka 6000 Theoremen (die meisten von ihnen ohne Beweis dargestellt), die von G. S. Carr, einem Dozenten an der Universität Cambridge zusammengestellt worden waren. Diese beiden Bücher waren die Grundlage für Ramanujans mathematisches Training.

Im Jahr 1903 wurde Ramanujan von einem örtlichen College der Regierung aufgenommen. Ganz vertieft in seine eigenen mathematischen Spielereien auf Kosten von allem anderen, fiel er bei den Prüfungen durch, ein Muster, das sich vier Jahre später an einem anderen College in Madras wiederholte.
Nach seiner Heirat im Jahr 1909 verzichtete er auf sein Hobby - zumindest vorläufig - um einen Arbeitsplatz zu suchen. Zu seinem Glück bekam er 1910 von R. Ramachandra Rao, ein wohlhabender Förderer der Mathematik, ein monatliches Stipendium hauptsächlich auf Grund des Ausmaßes wohlwollender Empfehlungen durch mehrere indische Mathematiker und der Ergebnisse, die er herausgefunden und in den "Notizbüchern" zu Papier gebracht hatte.

Als er auf mehr konventionelle Arbeit Lust hatte, nahm er 1912 im Port Trust von Madras eine Stelle als Sachbearbeiter an, wo der Präsident, Sir Francis Spring, ein Ingenieur aus England und der Manager, V. Ramaswami Aiyar, der Gründer der Indischen Mathematischen Gesellschaft war. Sie ermutigten Ramanujan, seine Ergebnisse drei herausragenden britischen Mathematikern zu übermitteln. Zwei antworteten anscheinend nicht. der dritte, der von sich hören ließ, war G. H. Hardy aus Cambridge, der heute als der führende britische Mathematiker der damaligen Zeit angesehen wird.

Hardy, der es gewohnt war, verschrobene Post zu erhalten, tendierte am 16. Januar 1913, als der Brief ankam, bei der ersten Durchsicht dazu, ihn unbeachtet zur Seite zu legen. Trotzdem setzte sich Hardy nach dem Abendessen mit seinem engen Kollegen, John E. Littlewood zusammen, um eine Liste von 120 Formeln und Theoremen zu enträtseln, die Ramanujan an seinen Brief angehängt hatte. Stunden später waren sie zu dem Schluß gekommen: sie saßen vor der Arbeit eines Genies und nicht eines Spinners.(Gemäß seiner eigenen "Skala reinen Talents" für Mathematiker sollte Hardy später Ramanujan die Note 100 vergeben, Littlewood die Note 30 und sich selbst 25. Der deutsche Mathematiker David Hilbert, die einflußreichste Gestalt seiner Zeit, bekam nur 80.) Hardy beschrieb diese Offenbarung und ihre Folgen als das eine romantischen Ereignis seines ganzen Lebens.
Er schrieb, daß einige von Ramanujans Formeln ihn völlig ratlos dastehen ließen. Und doch "mußten sie wahr sein, denn falls sie nicht wahr wären, würde niemand die Einbildungskraft haben, sie zu erfinden".

Hardy lud Ramanujan unverzüglich ein, nach Cambridge zu kommen. Gegen die starken Einwände seiner Mutter wie seiner eigenen Vorbehalte, machte sich Ramanujan im März 1914 auf den Weg nach England. Während der nächsten fünf Jahre arbeiteten Hardy und Ramanujan am Trinity College zusammen. Die Mischung aus Hardys technischer Expertise und der jungfräulichen Brillianz Ramanujans erzeugte eine einzigartige Zusammenarbeit. Es kam zu einer Reihe von Erstveröffentlichungen über die Eigenschaften bestimmter arithmetischer Funktionen, die zur Beantwortung von Fragen wie:
Wieviele Primzahlteiler kann eine gegebene Zahl haben?
Wieviel Möglichkeiten gibt es, um eine Zahl als Summe kleinerer positiver ganzer Zahlen darzustellen?
das Fundament legten.

Im Jahr 1917 wurde Ramanujan Mitglied der Königlichen Gesellschaft der Stadt London und des Trinity College - der erste Inder, dem beide Ehren zuteil wurden. Mit zunehmendem Bekanntheitsgrad begann seine Gesundheit sich jedoch stark zu verschlechtern, ein Niedergang, der vielleicht durch die Schwierigkeit, eine strikte vegetarische Diät im England der kriegsbedingten Rationierung von Nahrung einzuhalten, beschleunigt wurde. Obwohl Ramanujan in Sanatorien ein- und ausging, fuhr er fort, neue Ergebnisse hervorzubringen. Im Jahr 1919, als der Frieden das Reisen ins Ausland wieder sicher machte, kehrte Ramanujan nach Indien zurück. Obwohl er für junge indische Intellektuelle bereits ein großes Vorbild war, starb der 32-jährige Ramanujan am 26. April 1920 laut der Diagnose an Tuberkulose, was gegenwärtig aber als ernster Mangel an Vitaminen gedeutet wird. Der Mathematik bis zum Ende treu ergeben, ließ Ramanujan während seiner letzten von Schmerzen heimgesuchten Monate nicht locker und brachte sein bemerkenswertes Werk hervor, das in seinem "Verlorenen Notizbuch" aufgezeichnet ist.

Ramanujans Arbeit an Pi erwuchs zum großen Teil aus seiner Untersuchung der modularen Gleichungen, wahrscheinlich der in den "Notizbüchern" am gründlichsten behandelte Gegenstand, Einfach formuliert, ist eine modulare Gleichung eine algebraische Beziehung zwischen einer Funktion, die durch eine Variable x ausgedrückt wird, - in mathematischer Schreibweise f(x) - und derselben Funktion, ausgedrückt durch eine Potenz von x, zum Beispiel, von (x-Quadrat), (x hoch 3) oder (x hoch 4). Die "Ordnung" der modularen Gleichung ist definiert durch die ganzzahlige Potenz (2, 3 oder 4). Die einfachste modulare Gleichung ist die der zweiten Ordnung: f(x) = 2 mal Wurzel aus f(x-Quadrat) geteilt durch [1 + f(x-Quadrat)].

$$f(x)=2\frac{\sqrt{f(x^2)}}{(1+f(x^2))}$$

Es ist offensichtlich, daß nicht jede beliebige Funktion Lösung einer modularen Gleichung ist, aber es existiert eine Klasse von Funktionen, die als modular bezeichneten, mit dieser Eigenchaft.
Diese Funktionen weisen verschiedene erstaunliche Symmetrien, die ihnen einen speziellen Platz in der Mathematik sichern.

Ramanujan war unübertroffen in seiner Fähigkeit, Lösungen von modularen Gleichungen zu finden, die außerdem noch weitere Bedingungen erfüllen. Solche Lösungen werden als singulär bezeichnet. Es stellt sich heraus, daß die Suche nach singulären Werten in gewissen Fällen zu Ergebnissen führt, deren natürlicher Logarithmus mit Pi (mal einer Konstanten) bis zu einer erstaunlich hohen Stellenzahl übereinstimmt. Unter Anwendung dieses allgemeinen Verfahrens mit außergewöhnlicher Virtuosität, fand Ramanujan viele bemerkenswerte unendliche Reihen ebenso wie eingliedrige Näherungswerte für Pi. Einige von ihnen sind in Ramanujans einzigem formalen Arbeitspapier zu dem Thema enthalten, das 1914 unter dem Titel: 'Modulare Gleichungen und Approximationen von Pi' veröffentlicht wurde.

Ramanujans Versuche, Näherungswerte für Pi zu finden, sind Teil einer alten respektablen Tradition. Die ersten Indo-Europäischen Zivilisationen waren sich bewußt, daß die Fläche eines Kreises proportional ist zum Quadrat seines Radius und daß der Kreisumfang direkt proportional zum Durchmesser ist. Weniger klar ist jedoch, wann zum ersten Mal erkannt wurde, daß das Verhältnis des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser und das Verhältnis der Fläche eines beliebigen Kreises zum Quadrat des Radius in der Tat dieselbe Konstante darstellen, die heutzutage durch den griechischen Buchstaben π bezeichnet wird. (Das Symbol, das der Konstanten den Namen gibt, ist, verglichen mit der langen Geschichte der Mathematik, ein Nachzügler; im Jahr 1706 wurde es von dem englischen mathematischen Historiker William Jones eingeführt und von dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler im 18. Jahrhundert populär gemacht.

Archimedes aus Syrakus, der größte Mathematiker der Antike, arbeitete die die Gleichheit der beiden Verhältnisse in seiner Arbeit: 'Ausmessung eines Kreises' rigoros heraus. Er berechnete auf der Basis mathematischer Grundsätze auch einen Wert für π, anstatt durch direktes Ausmessen des Kreisumfangs, Fläche und Durchmesser. Archimedes Methode war, regelmäßige Vielecke (Polygone deren Seiten alle gleichlang sind) in einen Kreis mit Durchmesser Eins einzubeschreiben und umzubeschreiben und den Umfang der äußeren Polygone als obere Grenze, sowie den Umfang der inneren Polygone als untere Grenze für mögliche Werte des Kreisumfangs zu betrachten, der in diesem Fall gleich dem numerischen Wert von π ist.

Diese Vorgehensweise, sich einem Wert von Pi anzunähern, war nicht neu: Das Einbeschreiben von Polygonen mit immer mehr Seiten in einen Kreis war schon früher von Antiphon vorgeschlagen worden, und Antiphons Zeitgenosse, Bryson von Heraklea, hatte die Methode um umbeschriebene Polygone ergänzt. Das eigentlich Neue war, daß Archimedes die Wirkung genau bestimmte, die das Verdoppeln der Seitenzahl sowohl bei den um- wie auch einbeschriebenen Polygone hatte. Auf diese Art und Weise entwickelte er ein Verfahren, das, wenn es nur genügend oft wiederholt wurde, es im Prinzip erlaubte, Pi bis zu jeder beliebigen Stellenzahl auszurechnen. (Hier sollte darauf hingewiesen werden, daß der Umfang eines regelmäßigen Polygons mittels einfacher trigonometrischer Funktionen wie Sinus, Cosinus und Tangens leicht auszurechnen ist. Allerdings wurden in den Zeiten des Archimedes solche Funktionen nur zum Teil verstanden. Aus diesem Grund mußte sich Archimedes hauptsächlich auf geometrische Konstruktionen verlassen, was die Berechnungen um einiges aufwendiger machte, als sie heute erscheinen mögen.

Archimedes fing mit ein- und umbeschriebenen Sechsecken an, was zur Ungleichung 3 < Pi < 2 mal Wurzel aus 3 führte. Indem er die Seitenanzahl viermal verdoppelte und somit auf 96 erhöhte, verengte er den Spielraum der Zahl Pi auf 3 10/71 < Pi < 3 1/7 (Intervall [3,140845, 3,142857]), woraus er die Näherung Pi = 3,14 erhielt. Es existieren einige Belege, daß der noch vorhandene Text 'Ausmessung eines Kreises' nur ein Fragment einer umfangreicheren Arbeit ist, in der Archimedes beschrieb, wie er zu einer fünfstelligen Abschätzung: Pi = 3,1416 gelangte, indem er mit regelmäßigen Zehnecken anfing und sie sechsmal verdoppelte.

Obwohl die Methode des Archimedes auf einem simplen Konzept beruht, erforderte sie bei Abwesenheit einer einfachen Art, trigonometrische Funktionen zu berechnen, das Wurzelziehen, was ziemlich zeitaufwendig ist, wenn es von Hand gemacht wird. Darüber hinaus konvergieren die Schätzwerte nur langsam gegen Pi: ihr Fehler nimmt ungefähr um den Faktor vier pro Iteration ab. Trotzdem verließen sich bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts alle europäischen

Versuche, die Zahl Pi zu berechnen, auf die eine oder andere Art auf diese Methode. Der im 16. Jahrhundert lebende holländische Mathematiker Ludolph van Ceulen widmete einen großen Teil seiner Karriere der Berechnung der Zahl Pi. Gegen Ende seines Lebens gelang ihm eine Abschätzung mit 32 Ziffern, indem er den Umfang von umbeschriebenen und einbeschriebenen Vielecken mit 2 hoch 62 (um die 10 hoch 18) Seiten berechnete. Sein Wert von Pi, die in Teilen Europas als Ludolphsche Zahl bezeichnet wird, soll Gerüchten zufolge, als Grabinschrift gedient haben.

Die Entwicklung der höheren Rechenkunst, hauptsächlich dank Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz, ermöglichte es, Pi viel schneller zu berechnen. Die Infinitesimalrechnung stellt wirksame Techniken zur Berechnung der Ableitung einer Funktion (Veränderung des Funktionswertes im Verhältnis zur Änderung ihrer Variablen) und ihres Integrals (Summe diskreter Funktionswerte mal einen Variablenbereich) zu Verfügung. Durch Anwendung dieser Techniken kann man zeigen, daß inverse trigonometrische Funktionen durch Integrale quadratischer Funktionen, die die Kurve eines Kreises beschreiben, dargestellt werden können. (Die Umkehrung einer trigonometrischen Funktion ergibt den Winkel, der einem bestimmten Funktionswert entspricht. Zum Beispiel, die Umkehrung von Tangens 1 liefert einen Winkel von 45 Grad, oder äquivalent, Pi/4 Radians.)

(Die zugrundeliegende Verbindung zwischen trigonometrischer Funktion und allgebraischem Ausdruck kann eingesehen werden, indem man einen Kreis mit Radius Eins und dem Mittelpunkt im Ursprung eines x-y-Koordinatensystems betrachtet. Die Gleichung des Kreises - dessen Fläche zahlenmäßig gleich Pi ist - lautet: x-Quadrat + y-Quadrat gleich Eins, was ein Spezialfall des Satzes von Pythagoras für ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenuse gleich Eins ist. Darüber hinaus sind der Sinus und Kosinus des Winkels zwischen der positiven x-Achse und irgendeinem Punkt auf dem Kreis gleich den Koordinate des Punktes, y und entsprechend x; der Tangens des Winkels ist einfach y/x.)

Jedoch viel wichtiger für das Vorhaben der Bestimmung von Pi ist die Tatsache, daß eine umgekehrte trigonometrische Funktion in eine Reihe entwickelt werden kann, deren Summanden aus den Ableitungen der Funktion berechnet werden können. Newton selbst bestimmte Pi bis auf 15 Stellen, indem er die ersten paar Glieder einer Reihe addierte, die man als Ausdruck für die Umkehrfunktion des Sinus herleiten kann. Später gestand er einem Kollegen: "Ich schäme mich, ihnen zu sagen, bis zu wieviel Ziffern ich diese Rechenarbeit ausweitete, da ich damals nichts anderes zu tun hatte.

Im Jahr 1674 leitete Leibniz die Formel 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 ... = Pi/4 her, welches die Umkehr des Tanges von Eins ist. (Die allgemeine Reihe des umgekehrten Tangens, arctan, wurde ursprünglich im Jahr 1671 von dem Schottischen Mathematiker James Gregory entdeckt. Tatsächlich hat es den Anschein, daß unabhängig davon ähnliche Ausdrücke einige Jahrhunderte zuvor in Indien entwickelt worden waren.) Der Fehler der Näherungsrechnung - Differenz zwischen der Summe aus n Gliedern und dem exakten Wert von Pi/4 - entspricht ungefähr dem n+1-ten Term in der Reihe. Da der Nenner jedes folgenden Terms nur um den Faktor Zwei zunimmt, muß man ungefähr 50 Glieder addieren, um zwei-stellige Genauigkeit zu erzielen; 500 Terme, um dreistellige Genauigkeit zu erzielen und so weiter. Die Glieder der Reihe aufzusummieren, um einen Wert von Pi zu errechnen, der mehr als ein paar Stellen aufweist, untersagt sich von selbst.

Wie John Machin jedoch herausfand, machte die Reihenentwicklung der Umkehrung der Tangens-Funktion die Berechnung von Pi praktikabel. Er stellte fest, daß Pi/4 gleich dem Vierfachen des arctan (1/5) minus arc (1/239) ist. Da die Reihe der arctan-Funktion umso schneller konvergiert, je kleiner das Argument ist, vereinfachte Machins Formel die Berechnung beträchtlich. Indem er die Reihenentwicklung von arctan mit seiner Formel kombinierte, berechnete Machin im Jahr 1706 100 Stellen von Pi. In der Tat erwies sich seine Technik als so mächtig, daß vom Beginn des 18. Jahrhunderts an bis in die Gegenwart alle umfangreichen Berechnungen von Pi auf der einen oder anderen Variante dieser Methode basierten.

Zwei Berechnungen aus dem 19. Jahrhundert verdienen besondere Erwähnung. Im Jahr 1844 bestimmte Johann Dase 205 Stellen von Pi im Zeitraum von Monaten indem er die Werte von drei arctan mittels einer Machin-ähnlichen Formel berechnete. Dase war ein Rechengenie, der 100-stellige Zahlen ausschließlich im Kopf multiplizieren konnte - eine Leistung, für die er ungefähr acht Stunden benötigte. (Er war wahrscheinlich der nächste Vorläufer des modernen Superrechners, zumindest was die Gedächtnisfähigkeit angeht.) Im Jahr 1853 überrundete William Shanks Dase durch Veröffentlichung seiner Bestimmung von Pi auf 607 Stellen, obwohl sich nachher herausstellte, daß die Stellen nach der 527. Ziffer falsch waren. Shanks Arbeit dauerte Jahre und war zum Teil bloß routinemäßige aber mühsame Anwendung von Machins Formel. (Was in sich selbst eine Art Rekord sein muß: vergingen doch 92 Jahre bis Shanks Rechenfehler entdeckt wurde, als D. F. Ferguson seinen mit Hilfe einer mechanischen Rechenmaschine auf 530 Stellen bestimmten Wert von Pi mit dem von Shanks verglich.

Mit der Ankunft des digitalen Computers kam es zu erneuten Anstrengungen, noch viel mehr Stellen von Pi zu berechnen, da diese Art von Maschine idealerweise zum umfangreichen sich wiedeholenden "Zahlenfressen" geeignet war. ENIAC, einer der ersten digitalen Rechner, wurde 1949 von John von Neumann und seinen Kollegen zu diesem Zwecke eingesetzt. ENIAC produzierte 2037 Stellen in 70 Stunden. Im Jahr 1957 versuchte G. E. Felton 10 000 Stellen von Pi zu bestimmen; leider waren auf Grund eines Maschinenversagens nur die ersten 7480 Ziffern korrekt. Das Ziel von 10 000 Stellen gelang im folgenden Jahr F. Genuys auf einer IBM 704. Im Jahr 1961 bestimmten Daniel Shanks und John W. Wrench der Jüngere 100 000 Stellen von Pi in weniger als neun Stunden auf einer IBM 7090. Die Marke von einer Million Stellen wurde 1973 von Jean Guilloud und M. Bouyer überschritten, eine Tat, die weniger als einen Tag Rechenzeit auf einer CDC 7600 benötigte. (Die von Shanks und Wrench, Guilloud und Bouyer durchgeführten Berechnungen wurden tatsächlich zweimal ausgeführt, wobei unterschiedliche arctan-Identitäten von Pi zum Einsatz kamen. Vor dem Hintergrund der Geschichte des menschlichen als auch maschinellen Fehlers bezüglich dieser Berechnungen, braucht es solche Verifizierungen, bevor moderne "Ziffern-Jäger" einen Rekord offiziell als gültig betrachten.)

Obwohl die Steigerung der Rechengeschwindigkeit der Hauptgrund für immer genauere Berechnungen von Pi war, wurde bald klar, daß sich unüberwindliche Grenzen entgegenstellten. Die Verdoppelung der Ziffernzahl verlängert die Rechenzeit um mindestens einen Faktor Vier, vorausgesetzt man wendet in Computern die traditionellen Methoden der Arithmetik an. Deshalb würde Guillouds und Bouyers Programm selbst bei hundertfacher Steigerung der Rechengeschwindigkeit mindestens ein Vierteljahrhundert gebraucht haben, um einen Wert von Pi mit einer Milliarde Stellen zu generieren. Aus Sicht der frühen 1970iger schien eine solche Berechnung nicht wirklich praktikabel.